# 第八章 重积分

## 二重积分习题课

一、内容提要

（一）二重积分的概念、性质

1、定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2、几何意义：曲顶柱体的体积

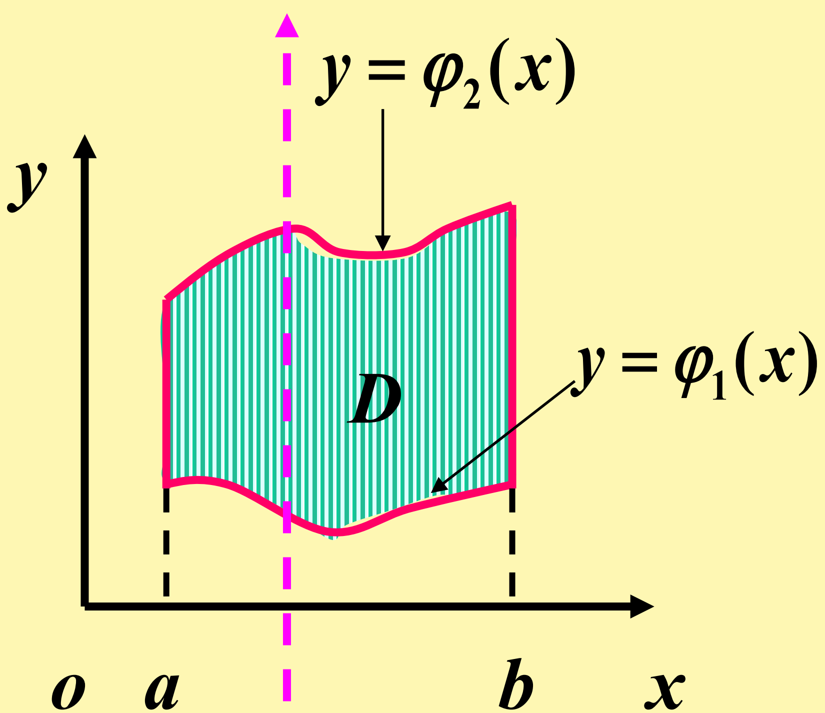
3、性质

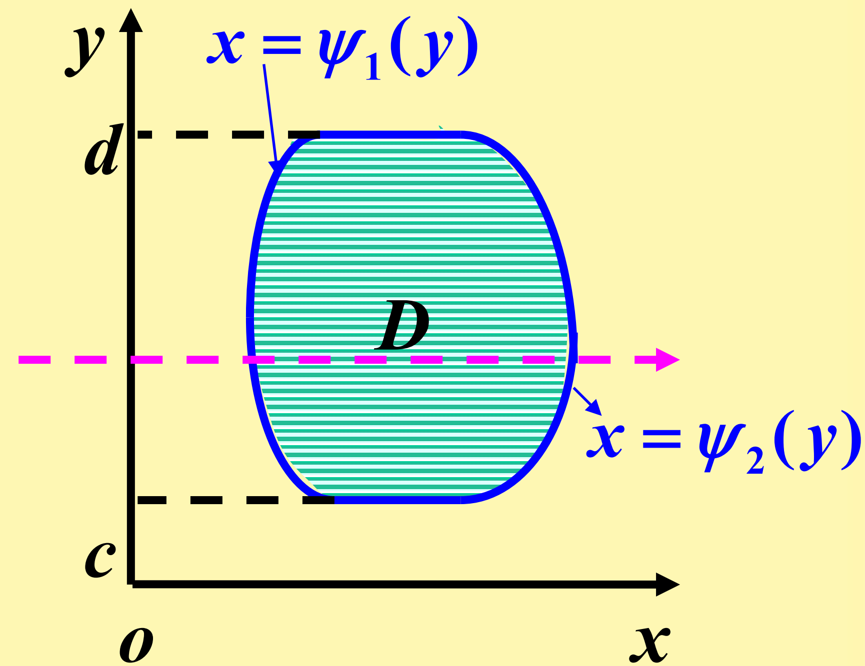
## （二）二重积分的计算

### 1、直角坐标系中

**(1) 积分区域$D$的类型：**

$X$—型区域，$Y$—型区域,一般区域分划。



积分区域的不等式表示的是二重积分化为二次积分确定积分限的基本依据。

(2) 积分顺序的确定

先积$y$还是先积$x$，要结合被积函数$f(x,y)$及积分区域两个方面的特点加以考虑。

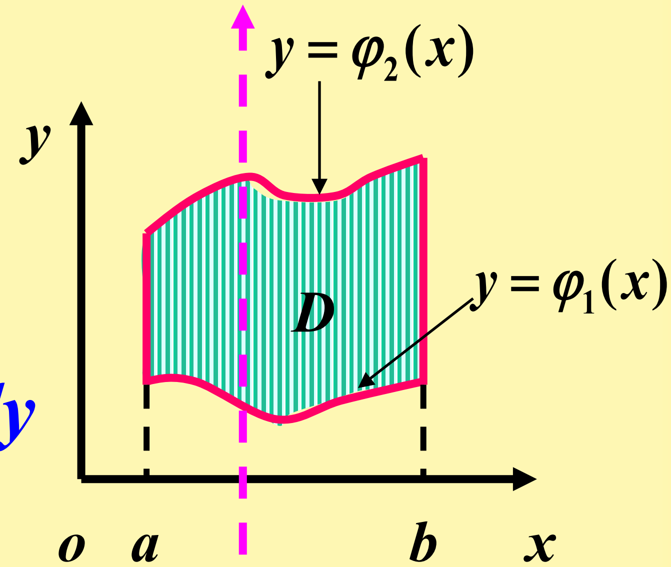
首先是“能积出”，其次是“易积出”。

如仅从积分区域的特点看，$D$是$X$—型区域时先积$y$；$D$是$Y$—型区域先积$x$。

$D$既是$X$—型区域又是$Y$—型区域时,选择定限时不需分块或分块较少的积分顺序。

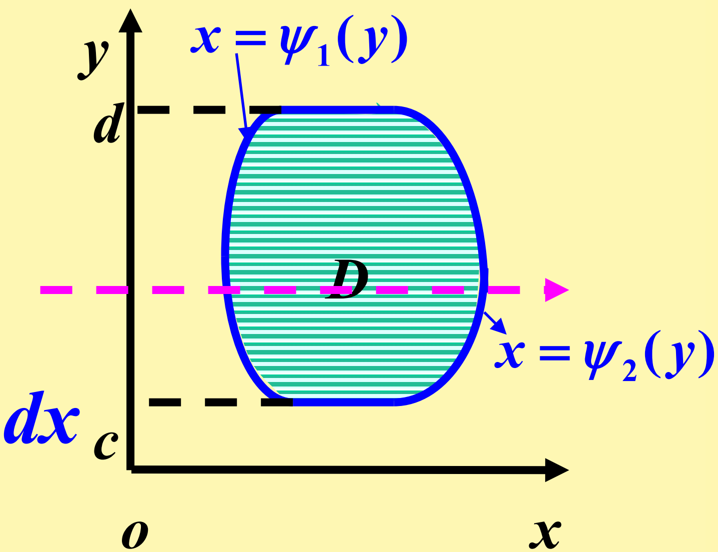
若 $D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$




若 $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$



(3) 交换积分顺序

由所给的二次积分的顺序及积分限，确定积分区域 $D$（画出图形），再按新的积分顺序将 $D$用新的不等式表出，即定出新的积分限。

2、利用极坐标计算二重积分

(1) 积分顺序通常是先 $r$后 $\theta$

(2) $D$的极坐标表示

(1) 极点在$D$外

$$D: \varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$$

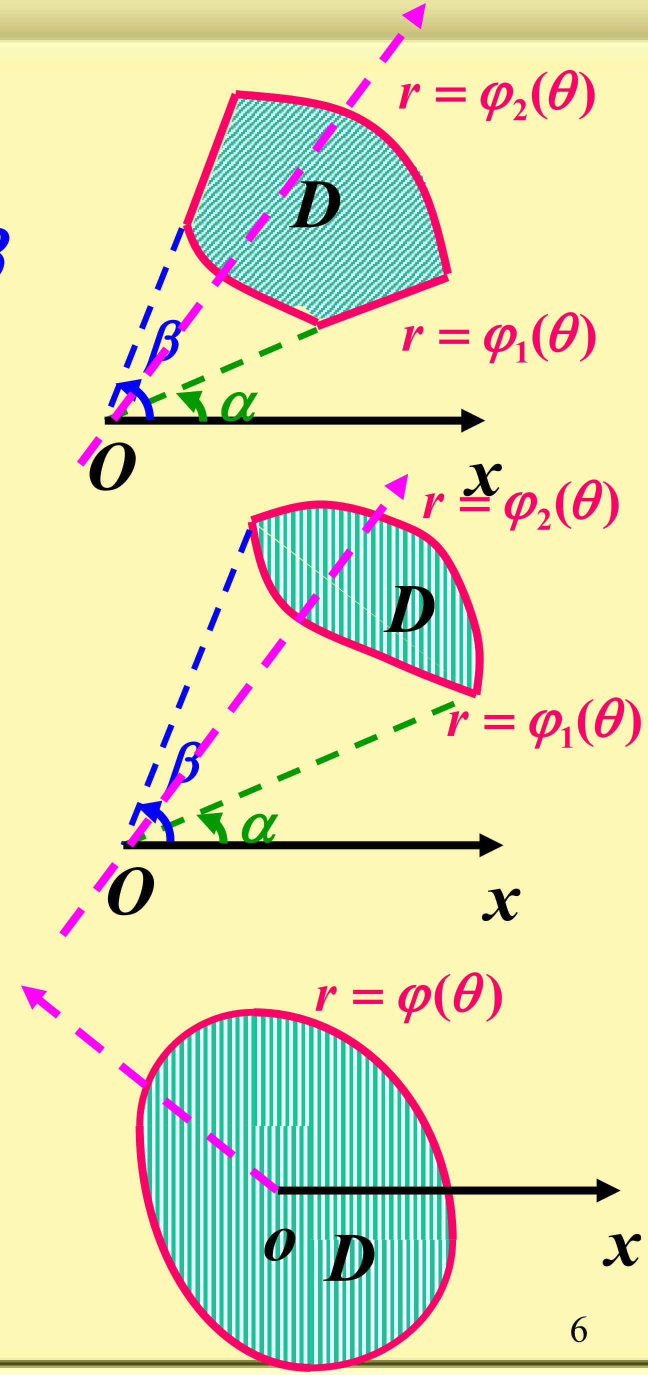
(2) 极点在$D$的边界上时

$$D: 0 \le r \le \varphi(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$$

(3) 极点在$D$的内部时

$$D: 0 \le r \le \varphi(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$$

如$D$的边界是由直角坐标方程:$y=f(x)$ 给出，通常可从几何意义去确定$D$的极坐标表示（图形是重要的）或利用$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 进行变换。



## (3)坐标系的选取

当 $D$ 的边界用极坐标表示比较简单或 $D$ 是圆域、圆的一部分时,

当被积函数形如 $f(x^2+y^2)$、$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$、$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 时

可考虑选用极坐标系。

（三）有关二重积分的对称性的应用

1、若$D$关于$y$轴对称

2、若$D$关于$x$轴对称

3、若$D$关于原点对称

4、若$D$关于直线 $y=x$对称

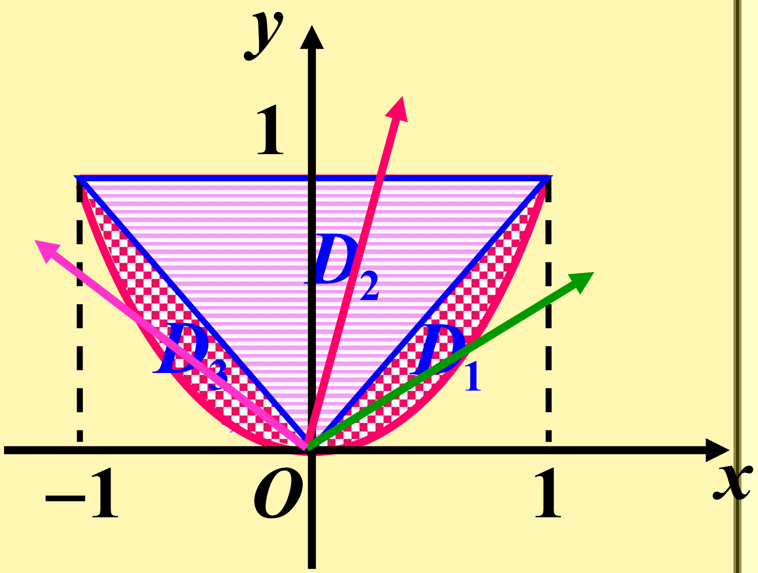
（四）有关二重积分的一些证明题

中值定理、变上限积分、换元等

例1 把$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$表为极坐标下的二次积分,

其中$D: x^2 \le y \le 1, -1 \le x \le 1$。

解 $D$的图形如下,将$D$分成三个部分区域。



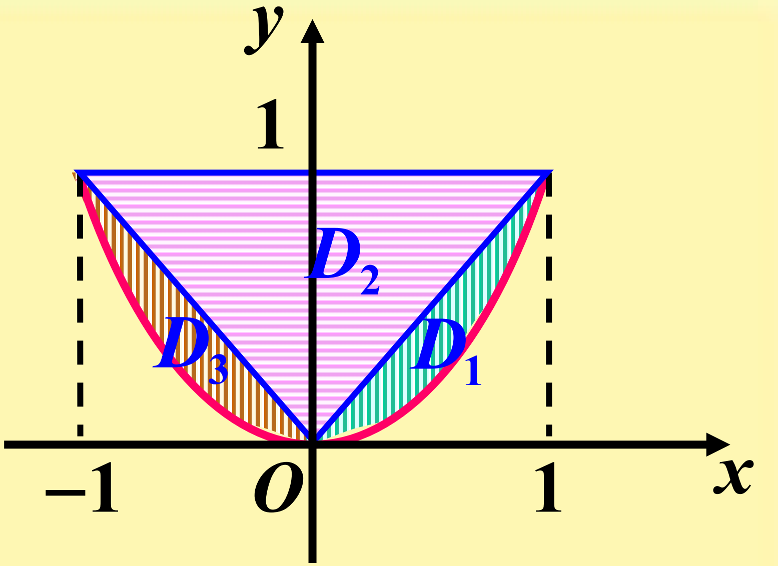

$$D_1: 0 \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4};$$

$$D_2: 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4};$$

$$D_3: 0 \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}, \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \iint_{D_i} f(x,y)d\sigma$$




$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

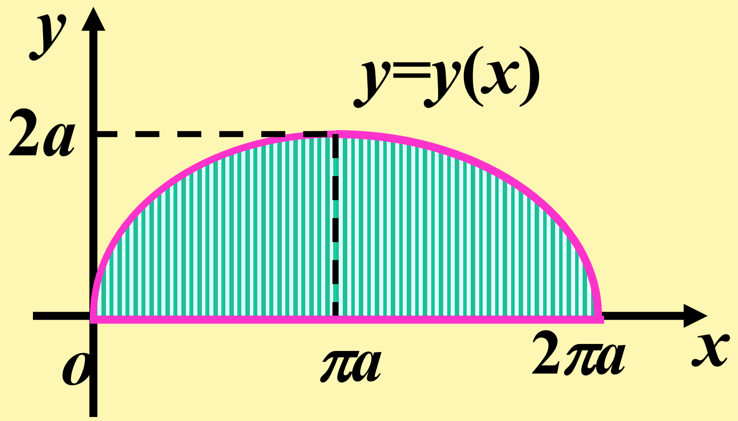
$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

**例3** 计算$I=\iint\limits_D y^2 dxdy$，其中$D$是由$x$轴和摆线

$$L:\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

的一拱所围成的区域。




解

$$I=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)dx$$

参数方程的定积分

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}2^4\sin^8\frac{t}{2}dt$$

$$I=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}2^4\sin^8\frac{t}{2}dt$$

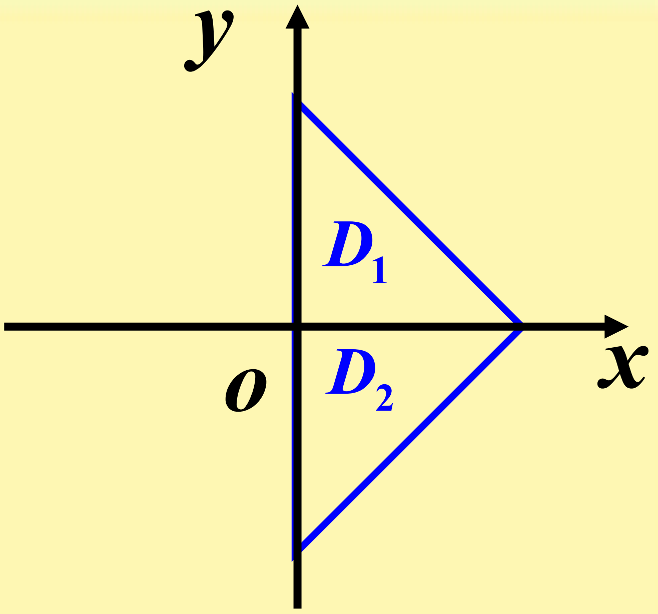
$$=\frac{32}{3}a^4\int_0^{\pi}\sin^8 u du \qquad 令\ u=\frac{t}{2}$$

$$=\frac{64}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\,du=\frac{64}{3}a^4\cdot I_8$$

$$=\frac{64}{3}a^3\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{35}{12}\pi a^4$$

有关二重积分的对称性的应用




回忆例子：计算$\iint\limits_D (|x|+|y|)d\sigma$，

其中$D: |x|+|y| \le 1 (x \ge 0)$

解 $\iint\limits_D (|x|+|y|)d\sigma$

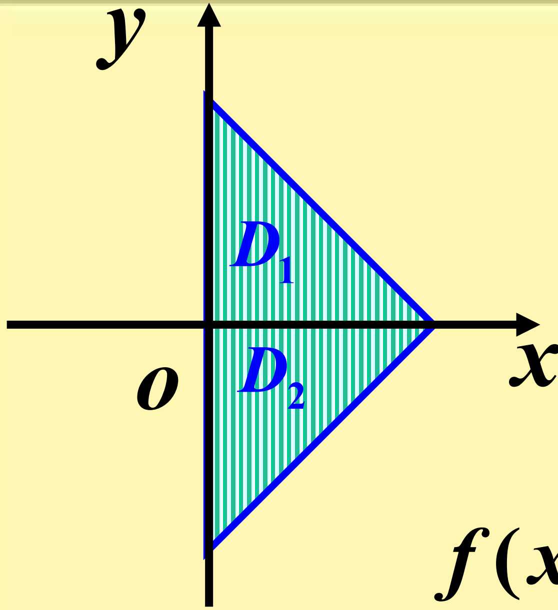
$$= \iint\limits_{D_1} (|x|+|y|)d\sigma + \iint\limits_{D_2} (|x|+|y|)d\sigma = 2\times\frac{1}{3}$$

为什么$\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$?

$D$关于 $x$轴对称

$f(x,-y) = f(x,y)$

关于$y$是偶函数




若 $f(x,-y)=-f(x,y)$: 关于 $y$ 是奇函数

则 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma=0$

$f(x,-y)=f(x,y)$: 关于 $y$ 是偶函数

| $D$ | $f(x,y)$ | $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$ |
|---|---|---|
| 关于 $x$ 轴对称 | 关于 $y$ 是奇函数 | $0$ |
| | 关于 $y$ 是偶函数 | $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ |

1、若$D$关于$x$轴对称　　　　奇零偶倍

即当$(x,y)\in D$时，必有$(x,-y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1}\big(f(x,y)+f(x,-y)\big)d\sigma$$

$$=\begin{cases} 0, & 若 f(x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 若 f(x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

$D_1$是$D$的上半部分区域

$f(x,-y)=-f(x,y)$: 关于$y$是奇函数

$f(x,-y)=f(x,y)$: 关于$y$是偶函数

| $D$ | $f(x,y)$ | $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$ |
|---|---|---|
| 关于 $x$轴对称 | 关于$y$是奇函数 | $0$ |
| | 关于$y$是偶函数 | $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ |
| 关于 $y$轴对称 | 关于$x$是奇函数 | $0$ |
| | 关于$x$是偶函数 | $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ |

$f(-x,y)=-f(x,y)$: 关于$x$是奇函数

$f(-x,y)=f(x,y)$:　关于$x$是偶函数

2、若$D$关于$y$轴对称　　　　奇零偶倍

即当$(x,y)\in D$时，必有$(-x,y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}\big(f(x,y)+f(-x,y)\big)d\sigma$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当} f(-x,y)=-f(x,y)\text{时} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当} f(-x,y)=f(x,y)\text{时}\end{cases}$$

其中$D_1$是$D$的右半区域

$f(-x,y)=-f(x,y)$: 关于$x$是奇函数

$f(-x,y)=f(x,y)$: 关于$x$是偶函数

3、若$D$关于原点对称，

即当$(x,y)\in D$时，必有$(-x,-y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}\Big(f(x,y)+f(-x,-y)\Big)d\sigma$$

$$=\begin{cases} 0, & 若 f(-x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 若 f(-x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

其中$D_1$是$D$的上半部分（或右半部分）区域。

若$D$关于$x, y$轴或原点对称：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1}\big(f(x,y)+f(\text{对称点})\big)d\sigma$$

其中$D_1$为$D$的上(右)半区域[靠近第一象限的区域]

4、若$D$关于直线$y=x$对称，

即当$(x,y)\in D$时，必有$(y,x)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1}\big(f(x,y)+f(y,x)\big)d\sigma$$

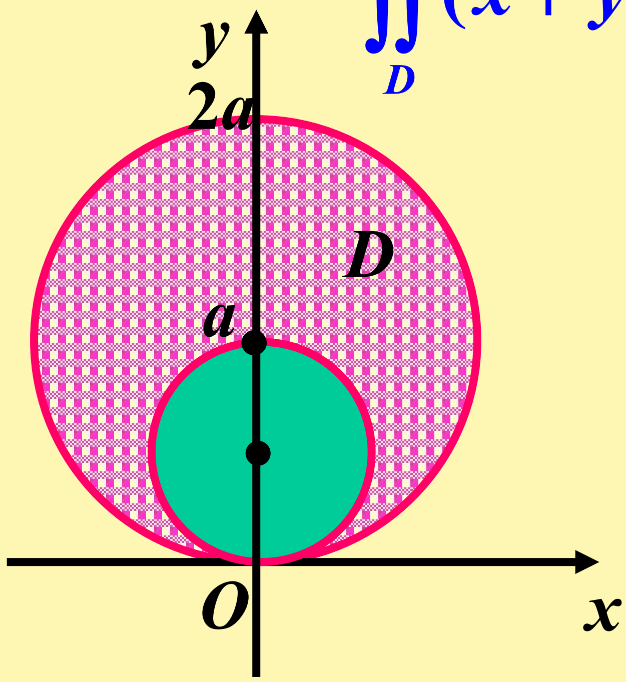
$$=\iint_D f(y,x)d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]d\sigma$$

注意：利用对称性时关键是看区域的特征

例5 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ $D$： $ay \le x^2+y^2 \le 2ay \ (a>0)$

$$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma = \iint\limits_D (x^2+y^2) d\sigma + \iint\limits_D 2xy d\sigma$$



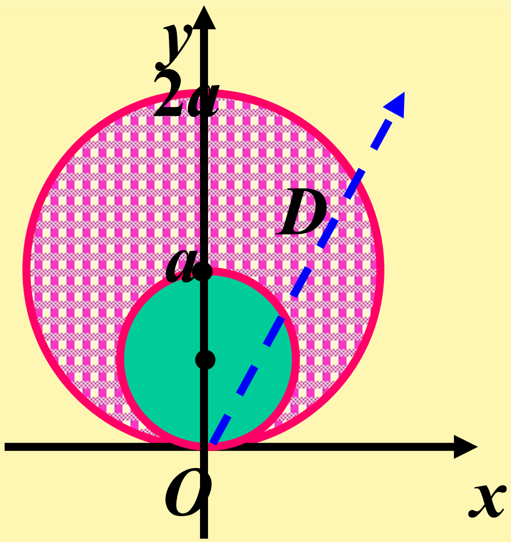

因为区域$D$关于$y$轴对称,

$2xy$关于 $x$ 为奇函数

所以 $\iint\limits_D 2xy d\sigma = 0$

$$\therefore \iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma = \iint\limits_D (x^2+y^2) d\sigma$$

$D: \quad ay \le x^2 + y^2 \le 2ay \ (a > 0)$




又因为$x^2 + y^2$关于 $x$ 为偶函数,

若设$D_1$为$D$中$x \ge 0$的部分,则

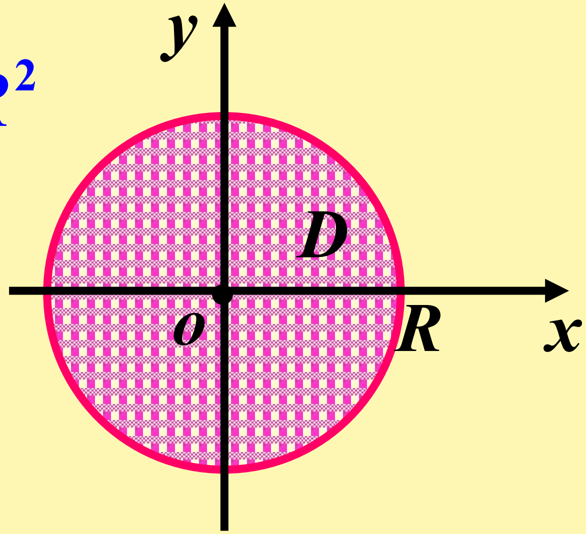
$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma = \iint_D (x^2+y^2) d\sigma$$

$$= 2\iint_{D_1} (x^2+y^2) d\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\sin\theta}^{2a\sin\theta} r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (16a^4\sin^4\theta - a^4\sin^4\theta) d\theta$$

$$= \frac{15a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = \frac{15a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{45\pi a^4}{32}$$

(2) $\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma$, $D: x^2+y^2 \le R^2$




因为积分区域 $D$ 关于$y=x$对称,

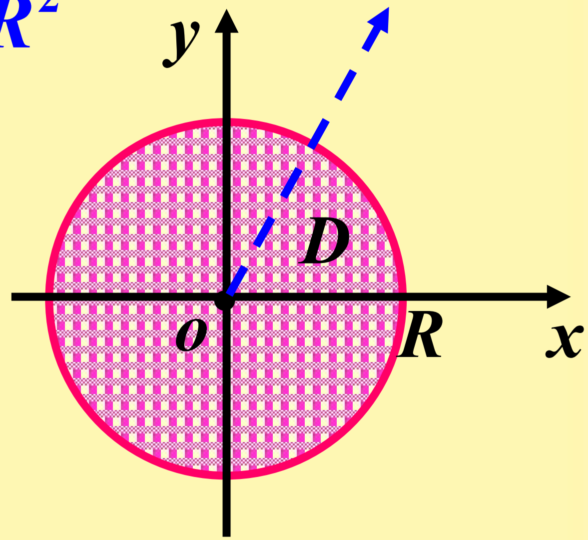
所以有

$$\therefore I=\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma =\iint_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}[\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma+\iint_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})d\sigma]$$

$$=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)d\sigma$$

$$D: x^2 + y^2 \le R^2$$




$$\therefore \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) d\sigma$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$$

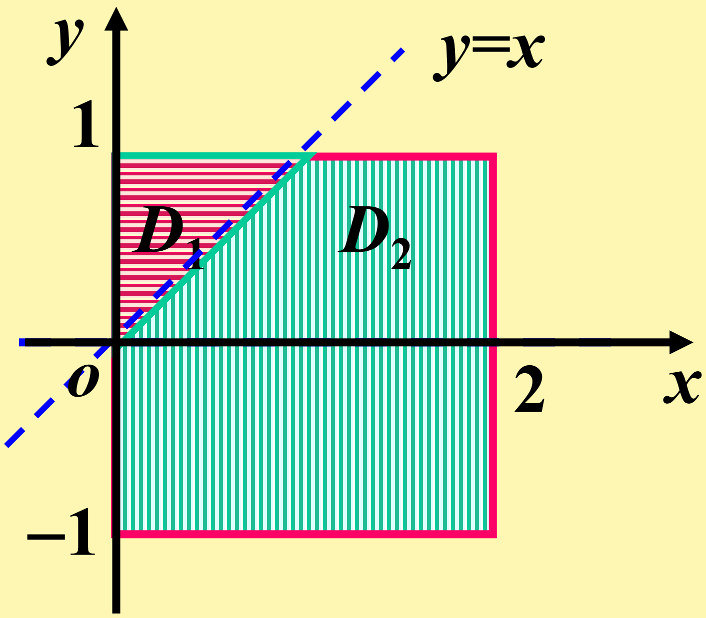
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{\pi R^4}{4}。$$

(3) $\iint_D \sqrt{\left|x-|y|\right|}\,dxdy$,

$D: 0 \le x \le 2, |y| \le 1$。




$D$关于$x$轴对称，被积函数关于$y$为偶函数。

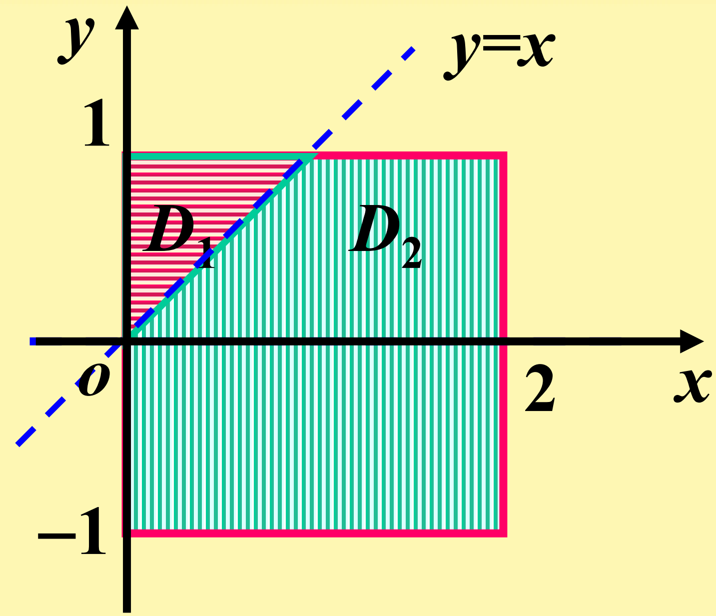
$$I = \iint_D \sqrt{\left|x-|y|\right|}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D上半部} \sqrt{|x-y|}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_1 \cup D_2} \sqrt{|x-y|}\,dxdy$$

用直线$y=x$将$D$在$x$轴上方部分分成两个小区域。

$$I=\iint\limits_{D}\sqrt{\left|x-|y|\right|}\,dxdy$$




$$=2\iint\limits_{D_1\cup D_2}\sqrt{|x-y|}\,dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x}\,dxdy+2\iint\limits_{D_2}\sqrt{x-y}\,dxdy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_x^1\sqrt{y-x}\,dy+2\int_0^1 dy\int_y^2\sqrt{x-y}\,dx$$

$$=\cdots=\frac{32}{15}\sqrt{2}。$$

视 $D_1$ 为 $X$ 型区域

视 $D_2$ 为 $Y$ 型区域

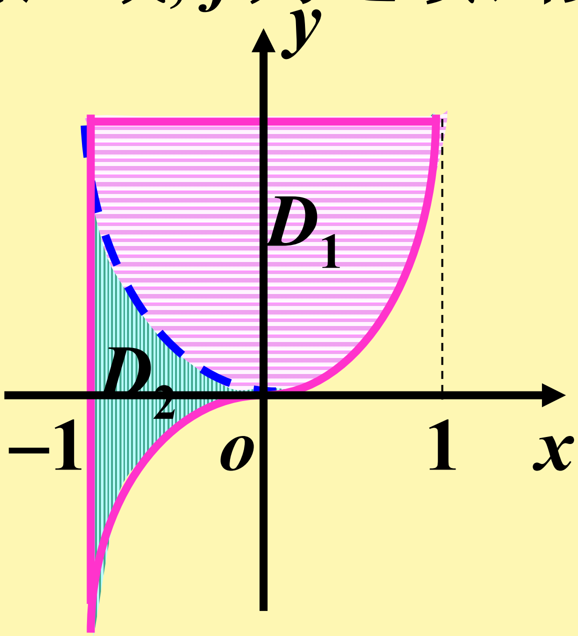
**例6** 计算$I=\iint_D x[1+\sin y f(x^2+y^2)]dxdy$，其中$D$是由$y=x^3, y=1, x=-1$所围区域，$f$为连续函数。

**解** 利用对称性

作曲线$y=-x^3$，将区域$D$分成两部分$D_1$和$D_2$

$D_1$关于$y$轴对称

$D_2$关于$x$轴对称

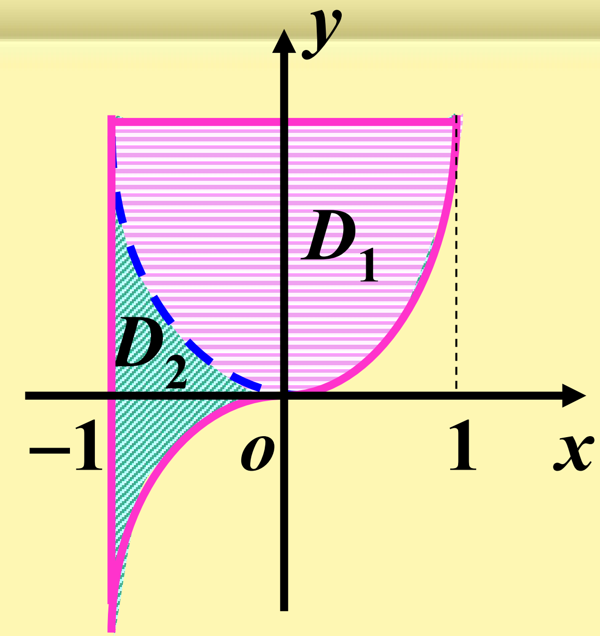



因为连续函数$x\sin y f(x^2+y^2)$关于变量$x$、$y$分别都是奇函数，$x$关于变量$x$是奇函数，所以有

$$\because \iint_{D_1} x\sin y f(x^2+y^2)dxdy = 0$$

$$\iint_{D_2} x\sin y f(x^2+y^2)dxdy = 0$$

$$\iint_{D_1} xdxdy = 0$$




$$\therefore I = \iint_{D} x[1+\sin y f(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \iint_{D} xdxdy + \iint_{D} x\sin y f(x^2+y^2)]dxdy$$

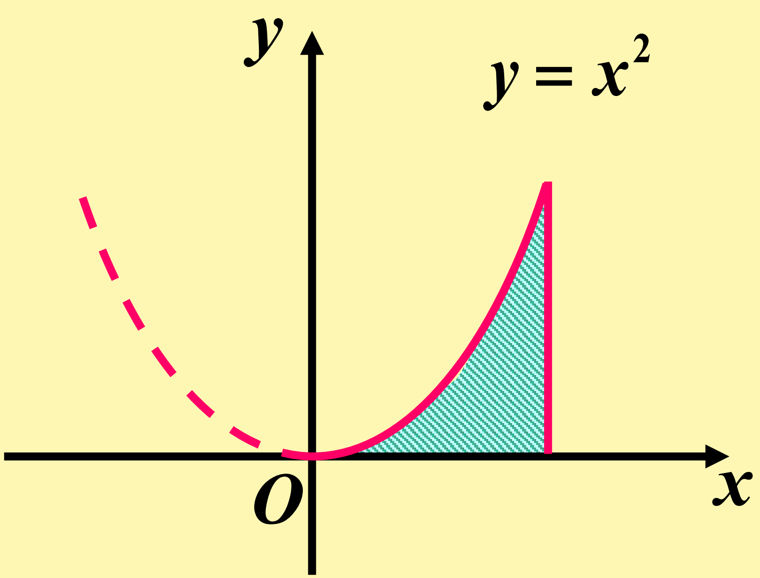
$$= \iint_{D} xdxdy = \iint_{D_1\cup D_2} xdxdy = \iint_{D_2} xdx$$

$$= 2\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x^3} xdy = -2\int_{-1}^{0} x^4 dx = -\frac{2}{5}$$

**例7** 设$f(x,y)$连续，$D$是由$y=0, y=x^2$,
$x=1$所围成的区域，且有

$$f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

求$f(x,y)$




**解** 积分区域$D$如图所示。

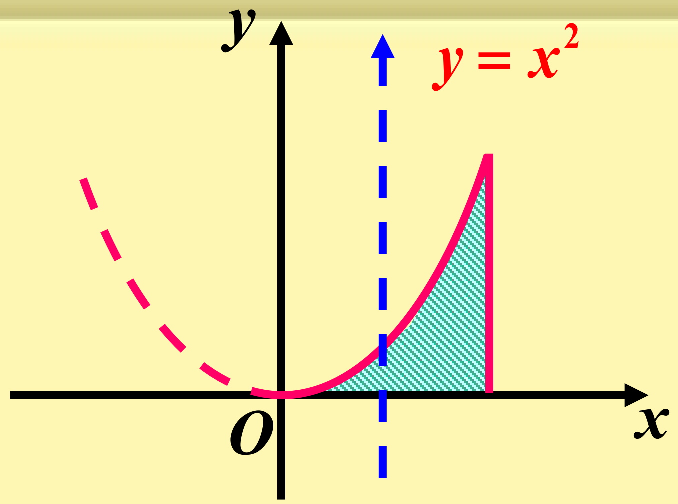
因为$D$是一有界闭区域，
$f(x,y)$连续，所以

$\iint_D f(x,y)dxdy$为一定值$I$

设$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$,则

$$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$=xy+I$ 两边积分，得:




$$\therefore I=\iint\limits_D (xy+I)dxdy=\iint\limits_D xydxdy+I\iint\limits_D dxdy$$

$$\because \iint\limits_D dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}xydy=\frac{1}{12}\quad \therefore I=\frac{1}{8},$$

从而得 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。

**例8** 已知$\int_0^1 f(x)dx = A$, $f$为连续函数,求证

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\frac{A^2}{2}=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)\cdot f(y)dy$$

**证明**

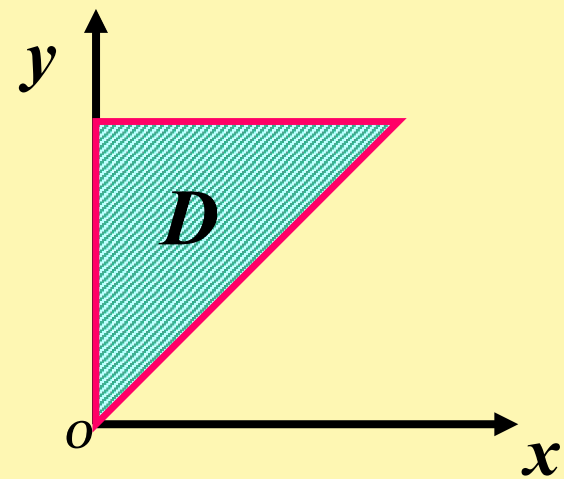
$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\iint_D f(x)f(y)dxdy$$

令 $x=u,\ y=v$

$$I=\int_0^1 du\int_u^1 f(u)f(v)dv$$

令 $u=y,\ v=x$

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx$$

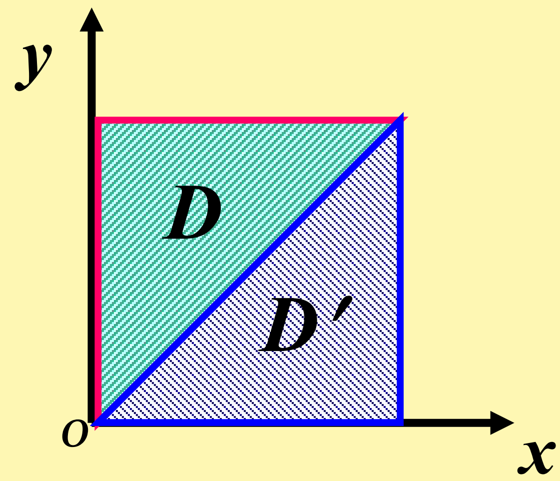


$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$$

$$=\iint_D f(x)f(y)dxdy$$

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx$$

$$=\iint_{D'} f(x)f(y)dxdy$$




$$\therefore I=\frac{1}{2}[\iint_D f(x)f(y)d\sigma+\iint_{D'} f(x)f(y)d\sigma]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D\cup D'} f(x)f(y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^1 f(x)f(y)dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\left[\int_0^1 f(y)dy\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy=\frac{A^2}{2}$$

也可借用原函数证明：设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则 $A=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)$

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy$$

$$=\int_0^1 f(x)F(y)\Big|_x^1 dx=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx$$

$$=F(1)\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 F(x)f(x)dx$$

$$=F(1)\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 F(x)dF(x)$$

$$=F(1)[F(1)-F(0)]-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}F^2(1)-F(1)F(0)+\frac{1}{2}F^2(0)=\frac{1}{2}[F(1)-F(0)]^2=\frac{A^2}{2}\text{。}$$